

## 5.4. ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI

Każdy wielomian można rozłożyć na czynniki co najwyżej drugiego stopnia.

### Metody rozkładu wielomianu na czynniki

a) rozkład wielomianu , korzystając z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej:

Znak $\Delta$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Postać iloczynowa funkcji kwadratowej	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	$y = a(x - x_0)^2$	nie ma postaci iloczynowej

b) wyciąganie czynnika przed nawias;

c) zastosowanie wzorów skróconego mnożenia:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{- kwadrat sumy}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{- kwadrat różnicy}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{- różnica kwadratów}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{- sześcián sumy}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{- sześcián różnicy}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{- suma sześciánów}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{- różnica sześciánów}$$

d) grupowanie wyrazów

Przykład 5.4.1. Wielomian  $W(x) = 2x^3 - 4x^2$  rozłóż na czynniki wyciągając czynnik przed nawias.

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) = 2x^3 - 4x^2$	Przed nawias wyciągamy czynnik $2x^2$ .
$W(x) = 2x^2(x - 2)$	

Przykład 5.4.2. Wielomian  $W(x) = x^4 - 6x^2 + 9$  rozłóż na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia.

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ $W(x) = (x^2)^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$ $W(x) = (x^2 - 3)^2$	Do rozkładu wielomianu $W$ zastosujemy wzór skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$W(x) = (x^2 - (\sqrt{3})^2)^2$ $W(x) = [(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})]^2$ $W(x) = (x - \sqrt{3})^2 (x + \sqrt{3})^2$	Do rozkładu czynnika $x^2 - 3$ stosujemy wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Przykład 5.4.3. Wielomian  $W(x) = -2x^4 - x^2 + 1$  rozłóż na czynniki wykorzystując postać iloczynową funkcji kwadratowej.

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) = -2x^4 - x^2 + 1$ $W(x) = -2(x^2)^2 - x^2 + 1$ $t = x^2$ $W(t) = -2t^2 - t + 1$	Wprowadzając zmienną pomocniczą $t = x^2$ wielomian $W(x)$ zapisujemy jako trójmian kwadratowy.
$a = -2; b = -1; c = 1$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9$	Doprowadzamy trójmian kwadratowy $W(t) = -2t^2 - t + 1$ do postaci iloczynowej. W tym celu obliczamy $\Delta$ .
$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ $t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot (-2)} = \frac{4}{-4} = -1$ $W(t) = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t + 1)$	$\Delta > 0$ , dlatego obliczamy $t_1, t_2$ i wykorzystujemy wzór $y = a(t - t_1)(t - t_2)$
$W(x) = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1)$	Powracamy do zmiennej $x$ , za $t$ podstawiamy $x^2$
$W(x) = -2\left(x^2 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(x^2 + 1\right)$ $W(x) = -2\left(x - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(x^2 + 1)$	Czynniki $x^2 + 1$ nie można rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia, bo $\Delta < 0$ . Do rozkładu czynnika $x^2 - \frac{1}{2}$ stosujemy wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Przykład 5.4.4. Wielomian  $W(x) = 5x^3 + 3x^2 + 10x + 6$  rozłóż na czynniki metodą grupowania wyrazów.

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) = \underline{5x^3 + 3x^2} + \underline{10x + 6}$	Grupujemy wyrazy wielomianu.
$W(x) = x^2(5x + 3) + 2(5x + 3)$	W pierwszej grupie wyciągamy przed nawias czynnik $x^2$ , a w drugiej czynnik 2.
$W(x) = (5x + 3)(x^2 + 2)$	Powtarzający się czynnik $5x + 3$ wyłączamy przed nawias.
Odp. $W(x) = (5x + 3)(x^2 + 2)$	Czynnik $x^2 + 2$ nie można rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia ,bo $\Delta < 0$ .

Przykład 5.4.5. Wielomian  $W(x) = x^3 + 2x^2 - 3$  rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia.

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ $W(x) = x^3 - x^2 + 3x^2 - 3x + 3x - 3$	Wielomian $W(x)$ rozłożymy na czynniki metodą grupowania wyrazów. Zauważmy, że jednym z pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest liczba 1 ( $W(1)=0$ ). Zatem wielomian zapisujemy w takiej postaci , aby po zastosowaniu metody grupowania wyrazów jednym z czynników był $x - 1$ .
$W(x) = \underline{x^3 - x^2} + \underline{3x^2 - 3x} + \underline{3x - 3}$	Grupujemy wyrazy wielomianu.
$W(x) = x^2(x - 1) + 3x(x - 1) + 3(x - 1)$	W pierwszej grupie wyciągamy przed nawias czynnik $x^2$ , w drugiej czynnik $3x$ , a w trzeciej czynnik 3.
$W(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 3)$	Powtarzający się czynnik $x - 1$ wyłączamy przed nawias.
Odp. $W(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 3)$	Czynnik $x^2 + 3x + 3$ nie można rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia ,bo $\Delta < 0$ .

Przykład 5.4.6. Wielomian  $W(x) = x^4 - 8x$  rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia.

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) = x^4 - 8x$ $W(x) = x(x^3 - 8)$	Wyciągamy czynnik $x$ przed nawias
$W(x) = x(x^3 - 2^3)$ $W(x) = x(x-2)(x^2 + 2x + 2^2)$ $W(x) = x(x-2)(x^2 + 2x + 4)$	Do rozkładu czynnika $x^3 - 8$ stosujemy wzór skróconego mnożenia $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$x^2 + 2x + 4$ $a = 1; b = 2; c = 4$ $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$  Odp. $W(x) = x(x-2)(x^2 + 2x + 4)$	Czynnik $x^2 + 2x + 4$ nie można rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia, ponieważ $\Delta < 0$

Przykład 5.4.7. Wielomian  $W(x) = x^4 + 4$  rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia.

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) = x^4 + 4$ $W(x) = x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4$ $W(x) = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2$ $W(x) = \left( (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 \right) - 4x^2$ $W(x) = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$	Wielomian $W(x)$ zapisujemy w postaci różnicy kwadratów.  Stosując wzór skróconego mnożenia $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ wyrażenie $x^4 + 4x^2 + 4$ zapisujemy jako kwadrat sumy.
$W(x) = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$ $W(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$	Stosujemy wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Odp. $W(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$	Czynnik $x^2 + 2x + 2$ nie można rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia, ponieważ $\Delta < 0$  Czynnik $x^2 - 2x + 2$ nie można rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia, ponieważ $\Delta < 0$

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 5.4.1. Wielomiany rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia:

a) (1pkt.)  $W(x) = x^2 - 4x + 3$

b) (1pkt.)  $W(x) = 5x^3 + 6x^2$

c) (1pkt.)  $W(x) = x^2 - 25$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Rozkład wielomianu na czynniki możliwie najniższego stopnia.	1

Ćwiczenie 5.4.2. Wielomiany rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia:

a) (2pkt.)  $W(x) = 5x^5 - 10x^3 + 5x$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Rozłożenie na czynnik czwartego stopnia i czynnik pierwszego stopnia.	1
2	Rozkład wielomianu na czynniki możliwie najniższego stopnia.	1

b) (2pkt.)  $W(x) = x^3 - 4x^2 - 25x + 100$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Rozłożenie na czynnik drugiego stopnia i czynnik pierwszego stopnia.	1
2	Rozkład wielomianu na czynniki możliwie najniższego stopnia.	1

c) (2pkt.)  $W(x) = x^4 + 2x^3 - 8x - 16$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Rozłożenie na czynnik trzeciego stopnia i czynnik pierwszego stopnia.	1
2	Rozkład wielomianu na czynniki możliwie najniższego stopnia.	1